

Άσκηση 5: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Δείξτε ότι ο $B = A^t A$ είναι $\bullet$ συμμετρικός
 όρα διαγώνιος. Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του είναι μη αρνητική.
 $B > 0$ αν και μόνο αν A αντιστρέψιμος.

Λύση: i) $B^t = (A^t A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = B \checkmark$ Άρα B συμμετρικός

ii) Έστω λ ιδιοτιμή του $B \Rightarrow BX = \lambda X$ με $X \neq 0_{n \times 1}$

$$A^t A X = \lambda X \Rightarrow X^t A^t A X = X^t \lambda X \Rightarrow (AX)^t \underset{n \times 1}{AX} = \lambda \underbrace{X^t X}_{\text{πινάκας}}$$

$$\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

$$X \neq 0_{n \times 1} \Rightarrow \|X\| \neq 0$$

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0 \checkmark$$

$$\|X\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

($\Rightarrow$) $B > 0 \Rightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές $\Rightarrow$ άρα το πινάκας δεν είναι

δεν είναι $\Rightarrow \det B \neq 0$

$\Rightarrow \det(A^t A) \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

($\Leftarrow$) A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \det A^t = \det A \neq 0 \Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow 0$
 δεν είναι ιδιοτιμή του B .

Όπως προηγουμένως ότι κάθε ιδιοτιμή λ του B είναι ≥ 0 και το
 πινάκας δεν είναι ιδιοτιμή. Άρα όλες οι ιδιοτιμές του B είναι
 θετικές $\Rightarrow B > 0$

Άσκηση 17:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/8 & \sqrt{3}/8 \\ \sqrt{3}/8 & 3/4 & -1/4 \\ -\sqrt{3}/8 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

παρίστανται γραφή;

Αν να βρείτε τον
διφασ και το ερωτ.

Λύση: i) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ✓

ii) A ορθογώνιος $A^t A = \dots = I_3$ ✓

$$\text{ii) } \det A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{4\sqrt{8}\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{8}\sqrt{8}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\det A > 0$$

A ορθογώνιος $\Rightarrow \det A = \pm 1$ Άρα $\det A = 1$ ✓

Άρα από θεωρήμα Euler παρίστανται γραφή.

$\lambda = 1$ ιδιοτιμή (Euler)

$$V(1) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 1I_3)X = 0_{3 \times 1} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2r_1 \\ -4r_2 \\ r_3 - r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - \sqrt{6}r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y+z=0 \Rightarrow y=-z \\ z=t \end{array}$$

$$\text{Άρα } V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} P^t$$

$$\text{tr}(A) = 1 + \cos \phi + \cos \phi$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1 + 2 \cos \phi$$

$$2 = 1 + 2 \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 6: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A ωφθετικός $n > 0$

$$A^m = O_{n \times n} \Rightarrow A \text{ μινωτικός}, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}; B = B^t, B^2 = O_{2 \times 2} B \neq O_{2 \times 2}$$

Λύση: O A μινωτικός $\Rightarrow$ πολωνώτο χ^m

$$\text{Άρα } m_A(x) | x^m \Rightarrow m_A(x) \in \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^m\}$$

A ωφθετικός $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος $\Rightarrow m_A(x)$ γινόμενο γραμμικών διαφορικών μεταβλητών

$$m_A(x) = x \Rightarrow m_A(A) = O_{n \times n} \Rightarrow A = O_{n \times n}$$

$$\text{Αν μου πειράζετο $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$ }$$

Άσκηση 33 Σχεδιάστε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ 1/\sqrt{2} & * & * \end{pmatrix}$

$$B \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad B^t = B$$

$$B \neq O_{2 \times 2} \quad B^2 = O_{2 \times 2}$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i^2 & 0 \\ 0 & i^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

33) Συμπληρώστε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ώστε να είναι ορθογώνιος.

Λύση: $\| (0, -1, 0) \| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$

$$\| (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + 0^2 + (1/\sqrt{2})^2} = 1$$

$\langle (0, -1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle = 0$ Άρα ο πίνακας A μπορεί να συμπληρωθεί σε ορθογώνιο.

$\langle (a, b, \gamma), (0, -1, 0) \rangle = 0 \quad -b = 0 \quad b = 0$

$\langle (a, b, \gamma), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle = 0 \quad a \frac{1}{\sqrt{2}} + \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad a = -\gamma$

$\| (a, b, \gamma) \| = 1 \quad \gamma = t$

$(a, b, \gamma) = (-t, 0, t) \quad \sqrt{t^2 + t^2} = 1 \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(a, b, \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

24) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

α) , διαγώνιος και ιδιοχώρους

β) Το ελάχιστο πολυώνυμο

γ) $A^{593} - 2A^{15} + A = O_{3 \times 3}$

α)

$$\alpha) \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 4 & 3 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x((x+2)(x-2)+3) =$$

$$= -x(x^2 - 4 + 3) = -x(x-1)(x+1)$$

$$V(1) = \dots$$

$$V(0) = \dots$$

$$V(-1) = \dots$$

$$\beta) m_A(x) \mid -x(x-1)(x+1)$$

$m_A(x)$ ποινικό
 $m_A(x), \chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες

$$m_A(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$$

$$A^3 - A = O_{3 \times 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} A^3 = A \\ A^5 = A^3 \\ A^7 = A^5 \end{array} \right\} A \text{ υπερτερείας } \in \text{ πεπερασμένου τάξης } = A$$

$$\gamma) A^{593} - 2A^{15} + A = A - 2A + A = O$$

(21)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i) Βρείτε τις τιμές για τις οποίες ο } A \text{ είναι διαγωνίσιος}$$

$$\text{ii) } A^{-1} = ; \text{ } \text{V.S. } A^{2017} + A^{2016} - 10A^{2015} + 8A^{2014} = 0$$

Λύση: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ k & 2-x & 0 \\ m & n & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(x-1)^2$

Πορίζεται $2(\text{anti}), 1(\text{anti}) \quad 1 \leq \dim(V(2)) \leq 2$

Για να είναι ο A διαγωνίσιος θα πρέπει $\dim(V(1)) = 2$

$V(1) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A-I)X = 0\}$ η διάσταση του χώρου των λύσεων του $(A-I)X = 0$ είναι ίση με το μέγεθος των αγνώστων μέγιστο τι καθόλου του πίνακα $A-I$

$$2 = 3 - \text{rank}(A-I)$$

$$\text{rank}(A-I) = 1$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$r_3 - nr_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m-nk & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m-nk = 0 \Rightarrow nk = m \quad (0 \text{ πίνακας διαγωνίσιμος})$$

$$\chi_A(x) = -(x-2)(x-1)^2$$

$$m_A(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{ii) } m_A(A) = O_{3 \times 3}$$

$$A^2 - 3A + 2I_3 = O_{3 \times 3}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3)$$

$$A^2 - 3A = -2I_3$$

$$A(A - 3I) = -2I_3$$

$$A\left(\frac{1}{-2}(A - 3I_3)\right) = I_3$$

(6)